

۱۱۱ - سهمی  $y = -mx^2 + mx + 1$  و خط  $y = -m - x$  یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود  $m$  شامل چند مقدار صحیح است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

پایخ: (۴)

برای بررسی تداقی دوفردا کافی است دو ضابطه را مساوی هم قرار دهیم.

$$-m\alpha^2 + m\alpha + 1 = -m - \alpha$$

$$m\alpha^2 + (-m-1)\alpha - (m+1) = 0 \quad (1)$$

چون لقمه شده در هیچ نقطه‌ای برخورد ندارند، پس معادله (۱) نباید جواب داشته باشد ( $\Delta < 0$ )

$$\Delta < 0 \rightarrow (-m-1)^2 - 4m(-m-1) < 0$$

$$m^2 + 2m + 1 + 4m^2 + 4m < 0$$

$$5m^2 + 6m + 1 < 0 \rightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}$$

بازه جواب شامل هیچ مقداری از اعداد صحیح نیست.

۱۱۲ - اگر  $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$  و  $g(x) = -|x|\sqrt{x}$  و  $\text{fog}^{-1}(a) = -3$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$$\frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

$$-\frac{1}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{1}{9} \text{ (۱)}$$

پانچ: ۳

در تابع  $f$  داریم ،  $f(-\frac{1}{4}) = 3$  و بالوہجہ برائند  $f(g^{-1}(a)) = -3$  می توانیم نتیجہ بگیریم  
 $g^{-1}(a) = -\frac{1}{4}$  بنابراین :

$$g^{-1}(a) = -\frac{1}{4} \rightarrow g(-\frac{1}{4}) = a$$

ضابطہ  $g(x) = -|x|\sqrt{x}$  است پس می توان نوشت :

$$g(-\frac{1}{4}) = -(\frac{1}{4}) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

۱۱۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  صفرهای سهمی  $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$  و  $\beta > \alpha$  باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

پایه ۱

ابتدا جمع و ضرب ریشه‌ها را می‌کنیم:

$$P = \alpha\beta = \frac{B}{25\alpha} \quad (1)$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-4}{25\alpha} \quad (2)$$

از رابطه (۱) داریم:

$$\alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

برای انتخاب  $\alpha$  درست، از بین دو جواب بدست آمده آنها را در رابطه (۲) قرار می‌دهیم و با شرط  $\beta > \alpha$  در صورت سوال چک می‌کنیم.

$$\alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{25(\frac{1}{5})} \rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \beta < \alpha$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{25(-\frac{1}{5})} \rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \beta > \alpha$$

پس معادله به صورت  $y = -5x^2 + 4x + 1$  است که داریم:

$$\alpha_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}, \quad y_S = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{4}{5}$$

رأس سهمی در ربع اول قرار دارد.

۱۱۴- به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع  $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای  $y = -4$  و پایین  $y = 0$  قرار دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ (۳)

برای یافتن جواب نامعادله  $0 < -\frac{1}{3-x} < -4$  را حل می‌کنیم

$$\textcircled{1} \quad \frac{-1}{3-x} < 0 \rightarrow 3-x > 0 \rightarrow x < 3$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{-1}{3-x} > -4 \rightarrow \frac{-4x+11}{x-3} > 0 \rightarrow x < \frac{11}{4} \text{ یا } x > 3$$

با اشتراک  $\textcircled{1}$ ،  $\textcircled{2}$  داریم:

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} = (-\infty, \frac{11}{4})$$

که اعداد طبیعی  $x=1$ ،  $x=2$  در این بازه قرار دارند.

۱۱۵- تابع  $y = (x-1)|x|$  در بازه  $(a, b)$  اکیداً نزولی است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

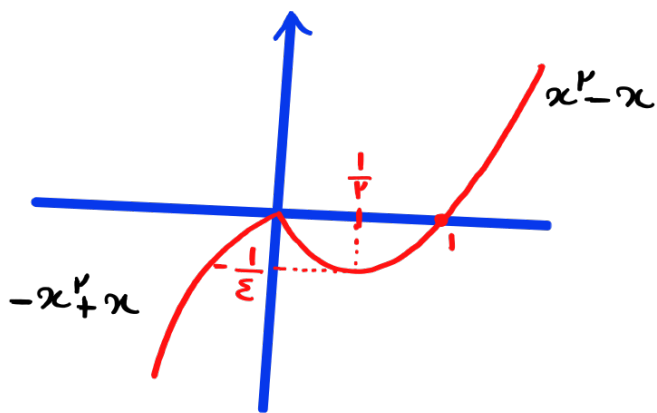
$\frac{1}{4}$  (۱)

پایه (۲)

ضابطه تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم

$$y = \begin{cases} (x-1)(x) & x \geq 0 \\ (x-1)(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 + x & x < 0 \end{cases}$$

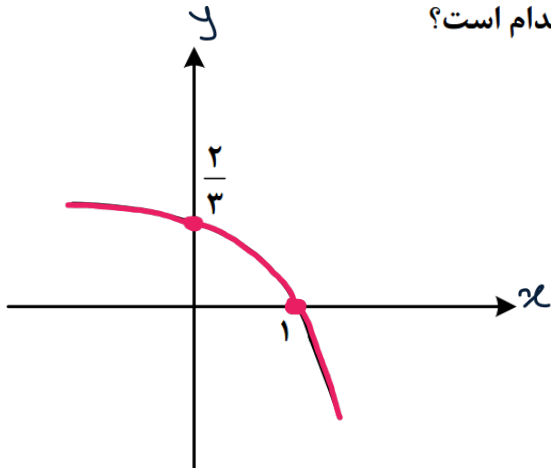
ماتریس به دایره دو ضابطه را رسم می‌کنیم:



نقطه در بازه  $(0, \frac{1}{2})$  نزولی است.

$$a=0, b=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

۱۱۶- شکل زیر نمودار تابع  $f(x) = 1 + c \times 3^{a+bx}$  است. مقدار  $f(-1)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{10}{9}$
- (۲)  $\frac{8}{9}$
- (۳)  $\frac{5}{3}$
- (۴)  $\frac{7}{8}$

پانچ (۲)

نقطه  $(1, 0)$  و نقطه  $(0, \frac{2}{3})$  روی نمودار و همچنین انتقال یک واحد به سمت راست قابل تشخیص است.

$$f(1) = 0 \rightarrow 1 + c \times 3^{a+b} = 0 \rightarrow c \times 3^{a+b} = -1 \quad (۱)$$

$$f(0) = \frac{2}{3} \rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \rightarrow c \times 3^a = -\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{c \times 3^{a+b}}{c \times 3^a} = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow 3^b = 3 \rightarrow b = 1$$

با تقسیم رابطه (۱) بر (۲) داریم:

تا این جا ضابطه بصورت  $f(x) = 1 + c \times 3^{a+x}$  درآمده است که با توجه به انتقال یک واحد نمودار به سمت راست  $a = -1$  و جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

$$c \times 3^{-1} = -\frac{1}{3} \rightarrow c = -1$$

$$f(x) = 1 - 3^{-1+x}$$

$$f(-1) = 1 - 3^{-2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

۱۱۷- اگر  $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$  ضابطه تابع وارون  $y = ax + a\sqrt{x}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۹

پایخ (۳)

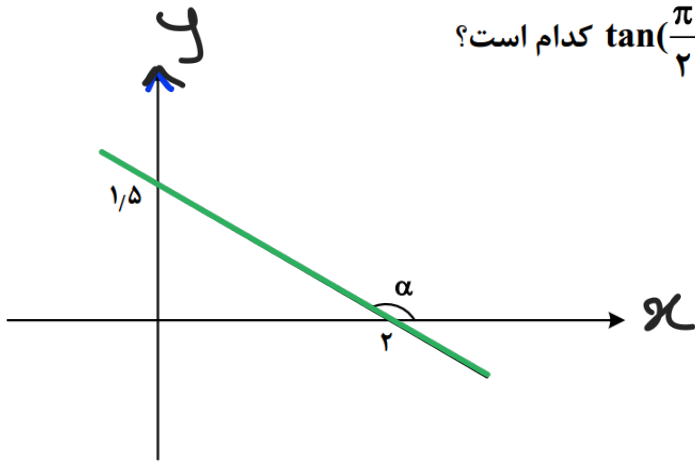
می‌دانیم اگر  $f(a) = b$  باشد آنگاه  $f^{-1}(b) = a$  خواهد بود.

بنابراین در یک عدد دنیواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(1) = \frac{1+2}{4} - \frac{\sqrt{1+1}}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad f^{-1}(1) = 1$$

$$f^{-1}(1) = a(1) + a(\sqrt{1}) = 2a \quad \rightarrow \quad 2a = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

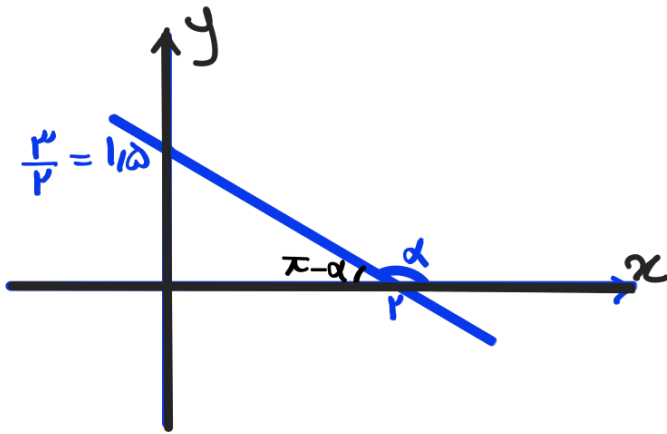
۱۱۸- در شکل زیر، زاویه  $\alpha$  مشخص شده است. مقدار  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{3}{4}$   
 (۲)  $\frac{4}{3}$   
 (۳)  $-\frac{3}{4}$   
 (۴)  $-\frac{4}{3}$

پایه ۴

باتوجه به شکل



$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

از منتهای می دانیم  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$  و  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cot \alpha$  است.

$$-\tan \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}$$



۱۱۹ - حاصل عبارت  $\frac{3\cos(248^\circ) - 2\sin(158^\circ)}{\sin(202^\circ) - \cos(292^\circ)}$  کدام است؟

۲/۵ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۰/۵ (۲)

۰/۵ (۱)

پایخ (۴)

عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{3\cos(170^\circ - 22^\circ) - 2\sin(110^\circ - 22^\circ)}{\sin(110^\circ + 22^\circ) - \cos(170^\circ + 22^\circ)} = \frac{-3\sin 22^\circ - 2\sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ - \sin 22^\circ} =$$

$$\frac{-5\sin 22^\circ}{-2\sin 22^\circ} = \frac{5}{2}$$

۱۲۰- معادله مثلثاتی  $\sin 2x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, \pi)$  دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$2 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$$

با فاکتورگیری از  $2 \sin x \cos x$  داریم:

$$2 \sin x \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

به صورت ضرب سه عامل داریم، بنابراین سه مورد را بررسی می‌کنیم. جواب معادله است.

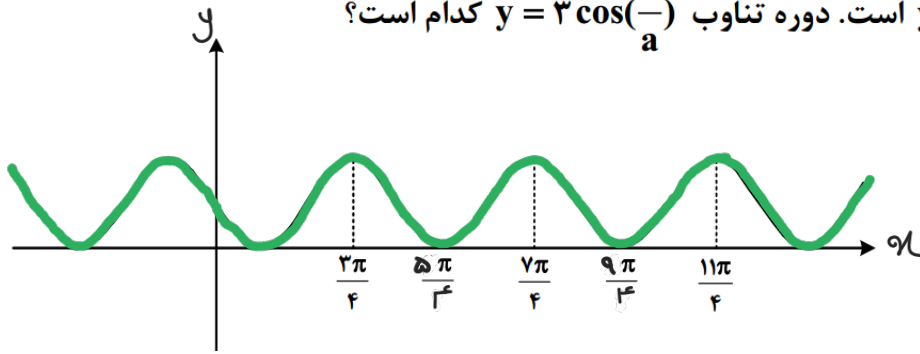
$$\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \xrightarrow{\text{در بازه } (-\pi, \pi)} x = 0$$

$$\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

پس ۵ جواب قابل قبول داریم.

۱۲۱- شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 + \sin ax$  است. دوره تناوب  $y = 3 \cos(\frac{x}{a})$  کدام است؟



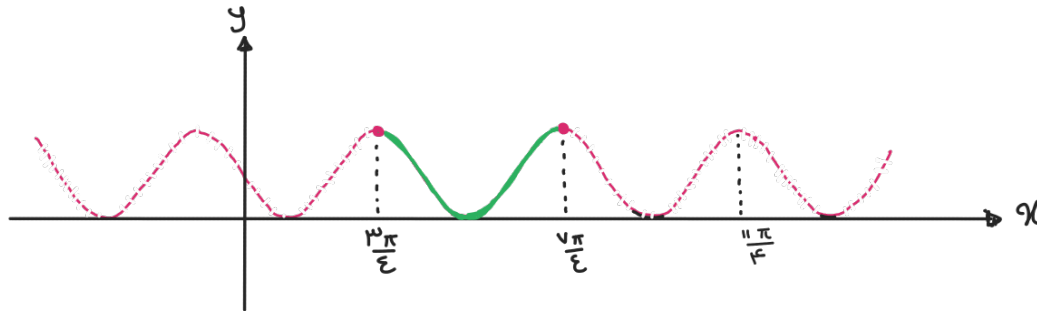
(۱)  $4\pi$

(۲)  $6\pi$

(۳)  $3\pi$

(۴)  $2\pi$

مطابق شکل، دوره تناوب تابع برابر  $T = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \pi$  است. پس:

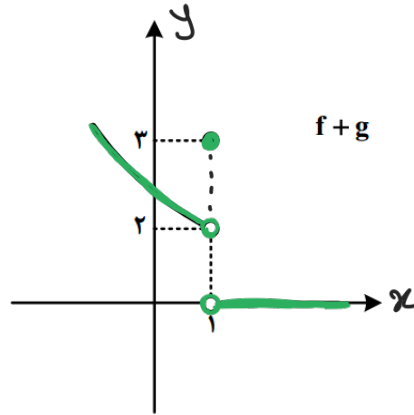
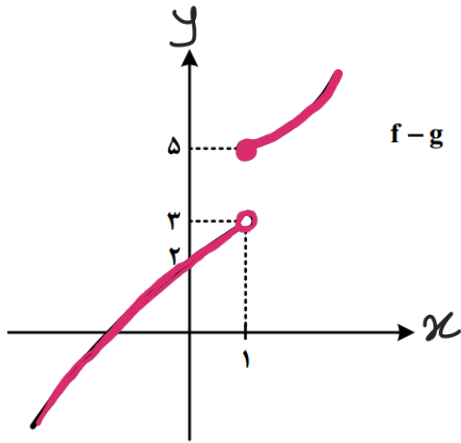


$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2$$

بنابراین دوره تناوب تابع  $y = 3 \cos(\frac{x}{2})$  برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۱۲۲- شکل‌های زیر، نمودار توابع  $f+g$  و  $f-g$  هستند. مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟



(۱) حد ندارد.

(۲)  $2/25$

(۳)  $2/5$

(۴)  $2/75$

یک بار حد را بست و یک بار برای حد چپ می‌سبب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f-g)(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2,5$$

چون حد را بست و حد چپ برابر با  $2,5$  هستند پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2,5$$

۱۲۳- اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{a + 2[-x]}{1 - 2x} = -\infty$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{x}{a} - x \right]$  کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) -۲

(۱) صفر

پایه (۴)

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{a - 2[-x]}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{a + 2}{1 - 2x} = \frac{a + 2}{0^-} \rightarrow a + 2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{x}{a} - x \right] = \left[ \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right]$$

$$a > -2 \rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{-2} \rightarrow 0 < \frac{1}{2a} < \frac{1}{-4} \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$$

پس داخل جز صیغ عددی در محدوده  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  است داریم:

$$\left[ \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right] = -1$$

۱۲۴- تابع  $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. مقدار  $\frac{a}{f(b)}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲)  $-\frac{1}{4}$

(۱)  $-\frac{1}{2}$

پایخ ①

تابع  $f(x)$  زمانی در  $\mathbb{R}$  پیوسته است که  $b=0$  باشد. در این صورت  $f(x) = -2a$  است.

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

۱۲۵- خط  $7y - x = 5$  در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی  $y = \frac{ax-1}{3x+1}$  مماس است. مقدار  $a$  کدام است؟

$$\frac{9}{7} \quad (4)$$

$$\frac{4}{7} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

پاسخ (۲)

چون این دو منحنی بر هم مماس اند پس معادله مماسی آنها باید دارای ریشه مضاعف باشند.

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{ax-1}{3x+1} \\ y_2 = \frac{5+x}{7} \end{array} \right\} \frac{ax-1}{3x+1} = \frac{5+x}{7} \Rightarrow 7ax-7 = 3x^2+14x+5$$

$$3x^2 + (14-7a)x + 12 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (14-7a)^2 - 4(3)(12) = 0$$

$$(14-7a)^2 = (12)^2 \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 14-7a=12 \Rightarrow a=\frac{2}{7} \\ 14-7a=-12 \Rightarrow a=4 \end{array} \right.$$

باید دو عدد در دست آورده باشد در معادله (۱) قرار دهیم تا بررسی کنیم به ازای کدام یک، نقطه مماسی در ناحیه اول است.

$$a=4 \rightarrow 3x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$3(x-2)^2 = 0 \rightarrow x=2, \quad a=4 \text{ مایل قبول است.}$$