

۱۲۶- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3(ax + 1)$ در بازه $[-1, 0]$ برابر ۱۱- است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه $x = -2a$ کدام است؟

۸ (۴)

۸ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

یا سه (۳)

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3(ax + 1)$ در بازه $[-1, 0]$ برابر با ۱۱-

است، پس:

$$\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - 1(1-a)}{1} = 11 \Rightarrow 11a - 1 = -11 \Rightarrow 11a = -10 \Rightarrow a = -\frac{10}{11}$$

حالا باید آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3(-\frac{10}{11}x + 1)$ را در $x = 1$

پیدا کنیم:

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2(2x)(-\frac{10}{11}x + 1) + (-\frac{10}{11})(x^2 + 1)^3$$

$$\Rightarrow f'(1) = 12 - 10 = 2$$

۱۲۷- مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ ، کدام است؟

(۴) -۷

(۳) -۹

(۲) -۱۱

(۱) -۱۴

جایگزین (۱)

می دانیم ریشه های ساده $f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس از تابع مشتق می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

حالا به جدول تعیین علامت

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	+	o	-	o	+
f		↗	↘	↗	

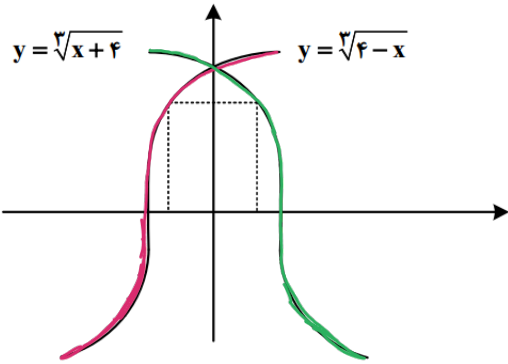
f' دقت کنید:

چون $x=2$ طول نقطه

مینیمم نسبی است، پس مقدار مینیمم نسبی تابع برابر است با:

$$f(2) = 2^3 - 12 \times 2 + 2 = 8 - 24 + 2 = -14$$

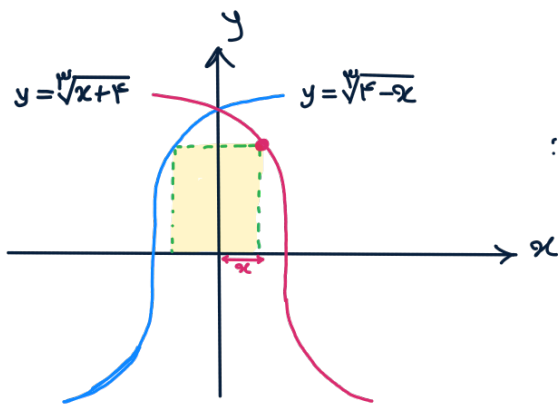
۱۲۸- مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده‌شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۶ (۴)

پاسخ: ۴

توجه کنید نمودار دو تابع $y = \sqrt[3]{4-x}$ و $y = \sqrt[3]{x+4}$ نسبت به محور y ها متقارن هستند، پس مساحت مستطیل برابر است با:



$$S = 2xy = 2x \sqrt[3]{4-x} = 2 \sqrt[3]{4x^2 - x^3}$$

حالا مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$S' = 2x \frac{12x^2 - 4x^3}{3 \sqrt[3]{(4x^2 - x^3)^2}} = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^2(3-x) = 0$$

پس $x=3$ است و مساحت بزرگ‌ترین مستطیل به ازای $x=3$

برابر است با:

$$S = 2x \sqrt[3]{4-x} \xrightarrow{x=3} \max(S) = 2 \times 3 \times 1 = 6$$

۱۲۹- برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به ترتیب برابر ۹ و ۳۹ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم کدام است؟

۱۸, ۲۳, ۳۹, ۱, ۳, ۴۲, $a, a, 2a+1, 23, 9$
 ۵۴/۵ (۴)

۴۵ (۳)

۲۱/۸ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ (ع)

چون چارک اول و چارک سوم برابر ۹ و ۳۹ هستند، پس داده‌های مرتب شده

به صورت زیر هستند:

نیمه اول داده‌ها: $1, 3, 9, a, a, 18$
 نیمه دوم داده‌ها: $23, 23, 39, 42, 2a+1$

میانگین داده‌های بین چارک اول و سوم برابر ۲۶ است، پس:

$$\bar{x} = \frac{2a + 18 + 23 + 23}{5} = 26 \Rightarrow 2a + 64 = 130$$

$$\Rightarrow 2a = 66 \Rightarrow a = 33$$

حالا میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، یعنی میانگین

دو داده ۴۲ و $2a+1$ را پیدا می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{42 + (2a+1)}{2} = \frac{42 + 67}{2} = \frac{109}{2} = 54.5$$

۱۳۰- با حروف کلمه «آهنگری» چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که حروف کلمه «گنه» کنار هم باشند؟

۲۱۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ (۳)

حروف کلمه «آگنه» را در یک بسته قرار می دهیم. سپس جایگشت بسته و ۳ حرف دیگر را حساب می کنیم و در جایگشت حروف درون بسته ضرب می کنیم:

$$\boxed{\text{گنه}} \quad \boxed{\text{آ}} \quad \boxed{\text{ر}} \quad \boxed{\text{ی}} \Rightarrow 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

۱۳۱- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد ظاهر شده متوالی و برابر نیستند؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \frac{5}{9} \quad (۲) \quad \frac{5}{12} \quad (۱)$$

پاسخ: ۲

پیشامد این که اعداد ظاهر شده متوالی باشند را A و پیشامد این که اعداد ظاهر شده برابر باشند را B نام می‌دهیم:

$$A = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۴), (۴,۵), (۵,۶), (۶,۷), (۷,۸), (۸,۹), (۹,۱۰), (۱,۱), (۲,۲)\}$$

$$B = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶)\}$$

پس احتمال این که « اعداد ظاهر شده متوالی و برابر نباشند » برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left[\frac{۱۰}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶} - ۰ \right] = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$$

۱۳۲- جعبه A شامل ۶ مهره آبی، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز است و جعبه B شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۶ مهره قرمز است. از جعبه A به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبه B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبه B انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مهره خارج شده از جعبه B آبی است؟

۰/۲۴ (۴)

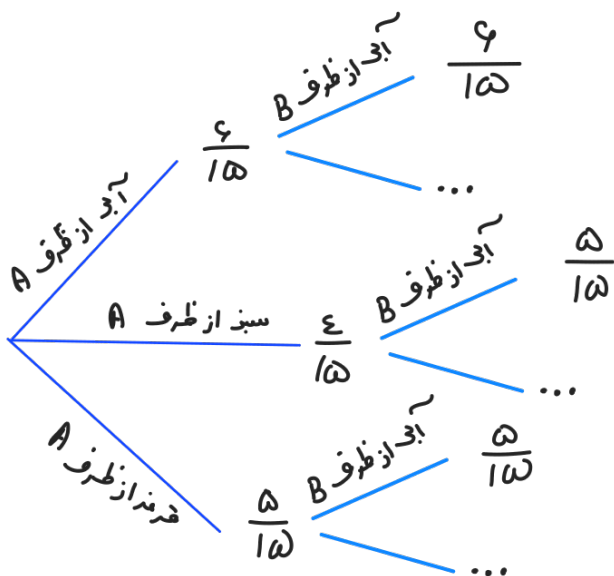
۰/۲۸ (۳)

۰/۳۲ (۲)

۰/۳۶ (۱) ✓

پاسخ ①

مهره خروجی از جعبه A با احتمال $\frac{6}{15}$ آبی، با احتمال $\frac{4}{15}$ سبز و با احتمال $\frac{5}{15}$ قرمز است. پس با توجه به خودار «نتی مقابل داریم»:



$$\Rightarrow P = \frac{6}{15} \times \frac{6}{15} + \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{5}{15}$$

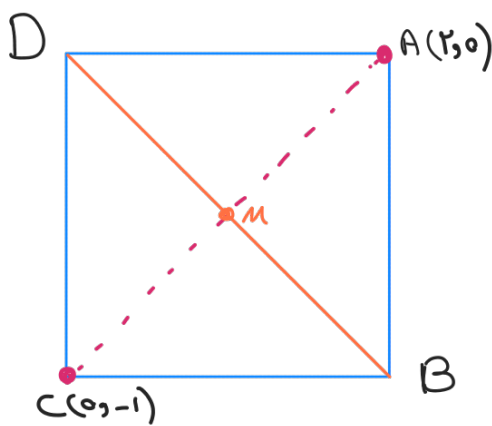
$$= \frac{6 \times 6 + 4 \times 5 + 5 \times 5}{15 \times 15} = \frac{9}{25} = 0/36$$

۱۳۳- نقاط $A(2,0)$ و $C(0,-1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

- (۱) $(0, \frac{3}{4})$ (۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ (۳) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ (۴) $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

پاسخ ۲

چون نقطه M وسط پاره خط AC است، پس $M(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+0}{2})$



است. یعنی $M(1, -\frac{1}{2})$ است.

در ضمن شیب خط AC برابر $m_{AC} = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2}$

است. پس شیب خط BD برابر $m = -2$ است.

با توجه به نقطه M ، معادله خط BD برابر

$$y = -2x + \frac{3}{4} \text{ است. پس مختصات نقطه } B$$

را به صورت $B(\alpha, -2\alpha + \frac{3}{4})$ فرض می‌کنیم. چون دو ضلع AB و BC بر هم

عمود هستند، پس:

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{-2\alpha + \frac{3}{4}}{\alpha - 2} \times \frac{-2\alpha + \frac{5}{4}}{\alpha} = -1$$

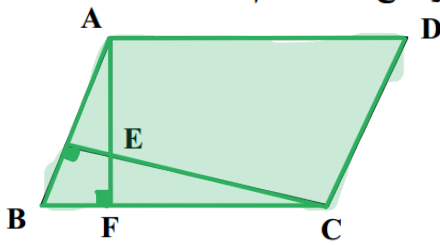
$$\Rightarrow 4\alpha^2 - 11\alpha + \frac{15}{4} = -\alpha^2 + 2\alpha \Rightarrow 5\alpha^2 - 10\alpha + \frac{15}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\Delta = 2^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1} \alpha = \frac{2 \pm 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$$

پس مختصات دو رأس دیگر B و D به صورت $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ و $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

است.

۱۳۴- در متوازی الاضلاع شکل زیر، $AD = 14$ ، $BF = 6$ و $AE = 8$ است. اندازه ارتفاع AF کدام است؟



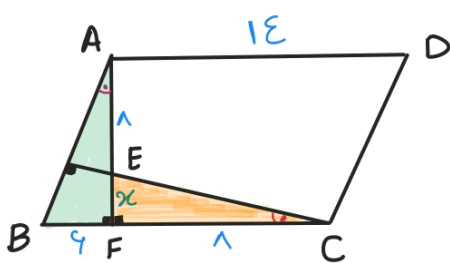
۱۶ (۱)

۱۴ (۲)

۱۲ (۳)

۱۰ (۴)

جاسغ (۳)



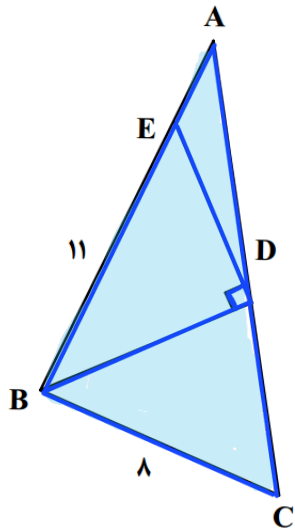
مطابق سائل، مثلث‌های $\triangle ECF$ و $\triangle ABF$

به حالت تساوی دو زاویه متساوی‌الزاویه است.

$$\frac{x}{6} = \frac{8}{8+x} \Rightarrow x^2 + 8x = 48 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 8x - 48}_{(x-4)(x+12)} = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 4$$

بنابراین $AF = 8 + x = 12$ است.

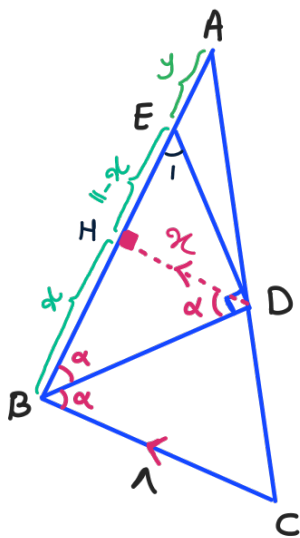
۱۳۵- در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



- (۱) ۶/۶
- (۲) ۵/۴
- (۳) ۳/۶
- (۴) ۲/۴

پاسخ (۱)

از رأس D ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم.
 طبق صورت سوال، ارتفاع DH موازی ضلع BC است.
 پس $\hat{B} = 90^\circ$ است. بنابراین $2\alpha = 90^\circ$ و در نتیجه



$\alpha = 45^\circ$ است. در ضمن چون $DH \parallel BC$ است،

پس خط BD مورب می‌باشد و مثلث BDH

مساوی الساقین است و در نتیجه $DH = x$ است.

حالا به مثلث BDE توجه کنید. در این مثلث قائم الزویه، چون $\alpha = 45^\circ$ است، پس

$\hat{E}_1 = 45^\circ$ است. یعنی ارتفاع وارد بر وتر، میانه نیز است. بنابراین:

$$x = 11 - x \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = 5.5$$

حالا با توجه به موازی بودن BC و DH ، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{DH}{BC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{5.5}{8} = \frac{y + 5.5}{y + 11} \Rightarrow 11y + 44 = 5.5y + 60.5$$

$$\Rightarrow 5.5y = 16.5 \Rightarrow y = 3$$

۱۳۶- اگر $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$ باشد، حاصل $3B + 1$ کدام است؟

$2\sqrt{7}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{7}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ (۲)
صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{8 + 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} + 4}$$

حالا صورت و مخرج عبارت به دست آمده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} + 4} \times \frac{\sqrt{7} - 4}{\sqrt{7} - 4} = \frac{7 - 3\sqrt{7} - 4}{7 - 16} = \frac{3 - 3\sqrt{7}}{-9} = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}$$

$$\Rightarrow 3B + 1 = 3 \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{3} \right) + 1 = \sqrt{7}$$

۱۳۷- اگر $n(A \cap B) = 3n(A - B) = 2n(B - A)$ و $n(A \cup B) = 57$ باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

۴۸ (۴)

۴۵ (۳)

۳۶ (۲)

۳۳ (۱)

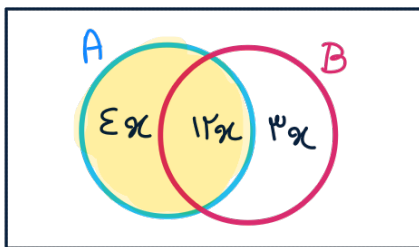
با سغ (۴)

فرض می کنیم $n(A \cap B) = 12x$ باشد، پس :

$$n(A \cap B) = 3n(A - B) \Rightarrow 12x = 3n(A - B) \Rightarrow n(A - B) = 4x$$

$$n(A \cap B) = 2n(B - A) \Rightarrow 12x = 2n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 6x$$

حالا، چون $n(A \cup B) = 57$ است، پس :



$$\Rightarrow 4x + 12x + 6x = 57 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$$

تعداد اعضای مجموعه A برابر $4x + 12x = 48$ است.

۱۳۸- با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جمله n ام دو دنباله کدام است؟

۶ (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ ①

با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم دنباله حسابی اولیه، داریم:

دنباله حسابی اولیه: $a, a+d, \dots, t_n$

دنباله حسابی جدید: $a+\varepsilon, a+d+\varepsilon, \dots, t'_n$

واضح است که قدر نسبت هر دو دنباله برابر d است. حالا اختلاف جمله n ام دو دنباله

را پیدا می‌کنیم:

$$t'_n - t_n = (a + \varepsilon + (n-1)d) - (a + (n-1)d) = \varepsilon$$

$$-۱۳۹ \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & |x| \leq 1 \\ ax^2 + 5 & |x| \geq 1 \end{cases} \text{ ضابطه تابع } f \text{ باشد، مقدار } f(a) \text{ کدام است؟}$$

۱۴ (۴)

۲۵ (۳)

۳۲ (۲)

۴۶ (۱)

پاسخ (۲)

به ازای $x=1$ ، مقدار تابع از ضابطه بالا و ضابطه پایین باید برابر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & ; |x| \leq 1 \\ ax^2 + 5 & ; |x| \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{x=1} \sqrt{1+3} + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 2$$

حالا برای پیدا کردن $f(3)$ سراغ ضابطه پایینی می‌رویم:

$$f(3) = 3 \times 3^2 + 5 = 32$$

۱۴۰- خط $3y + 2x = 9$ در نقطه $(0, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 3x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟

(۴) $-1/5$

(۳) $1/5$

(۲) $-3/5$

(۱) $3/5$

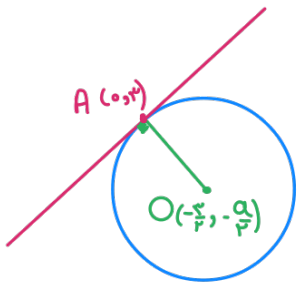
جاسخ (۴)

مرکز دایره $O(-\frac{3}{2}, -\frac{a}{2})$ به صورت $x^2 + y^2 + 3x + ay - c = 0$ است.

در ضمن می دانیم خط مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع عمود

است. چون شیب خط مماس $3y + 2x = 9$ برابر $m = -\frac{2}{3}$

است، پس $m_{OA} = \frac{3}{2}$ است و داریم:



$$m_{OA} = \frac{-\frac{a}{2} - 3}{-\frac{3}{2} - 0} = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} - 3 = -\frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -1/5$$